Α. ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΟΡΙΣΜΕΝΩΝ ΕΙΔΙΚΩΝ ΜΟΡΦΩΝ

Δίνεται.... (όχι πάντα)

Α-1. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $\boxed{z = \tan y}$, να αποδειχθεί ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dx} + x\tan y + x\tan^3 y = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{4}$$

έχει την ιδιότητα

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

Α-2. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$q(x)y' = yq'(x) - y^2,\ y(0) = 1,$$

όπου q είναι μία θετική συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και με $q(0) = 1$.

Α-3. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y - x)e^{x/y}\frac{dy}{dx} + y\left(1 + e^{x/y}\right) = 0.$$

$\left[\text{Ισχύει } \int \frac{z-1}{ze^{-1/z} + z^2}\,dz = \log\left|1 + ze^{1/z}\right| + \sigma\tau\alpha\theta.\right]$

Α-4. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x+y+1)}{x(x+3y+2)}.$$

Α-5. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x^2 + xy^2)y' - 3xy + 2y^3 = 0,$$

αφού βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής της μορφής $\rho(x,y) = x^n\phi(y)$.

Α-6. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y\log y = -\frac{y}{2\log y},\quad y(-1) = e^2.$$

(ii) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{(1+y)^2}{x - x^2 + xy},\quad y(1) = 1.$$ ← Δύσκολο

√ Α-7. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(x+2y-3)y' + x - y + 3 = 0,$$

με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $t = x + \alpha$, $z = y + \beta$ (όπου α και β είναι σταθερές που θα πρέπει να προσδιοριστούν).

√ Α-8. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' + x + y + 1 = (x+y)^2 e^{2x}, \quad y(0) = 1.$$

Α-9. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $z = x + y$, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y' = x(x+y)(x^4 + 2x^3 y + x^2 y^2 - 1) - 1.$$

√ Α-10. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(y - xy + y^3 \cos y)y' + xy^3 + y^2 = 0.$$

√ Α-11. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2x^2 + x^3 y + y)dx + (x + 4xy^4 + 8y^3)dy = 0; \quad x > 0, \; y > 0,$$

αφού πρώτα βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής της μορφής $\rho(x,y) = \phi(xy)$ (όπου ϕ είναι μία συνάρτηση που θα πρέπει να προσδιοριστεί).

√ Α-12. Ας είναι $\alpha, \beta, \gamma, \; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ σταθερές με $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$ και ας θεωρήσουμε τη λύση x_0, y_0 του συστήματος

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0, \quad \alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 = 0.$$

Με τη βοήθεια της αντικατάστασης

$$X = x - x_0, \quad Y = y - y_0,$$

να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1}.$$

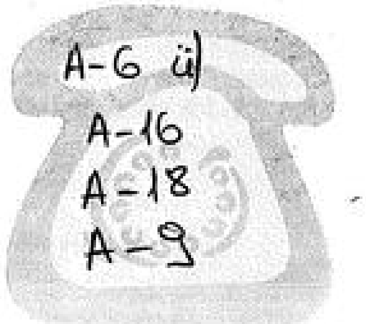
Εφαρμογή: Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + y - 3}{x + 2y - 3}.$$

ΘΕΜΑ Οκτώβριος 2011

√ Α-13. Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $X = x - \alpha$, $Y = y - \beta$ (όπου α και β είναι κατάλληλοι αριθμοί που θα πρέπει να προσδιοριστούν), να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+2}-\exp\left(\frac{x+y+1}{x+2}\right).$$



A-14. Με την αντικατάσταση $x=e^t$, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0,\ x>0.$$

A-15. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2y^3-3xy)dx+(x^2+xy^2)dy=0,$$

με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\rho(x,y)=\frac{1}{y}\phi\left(\frac{x}{y}\right)$, όπου ϕ είναι κατάλληλη συνάρτηση (που θα πρέπει να βρεθεί).

σας σημειώσεις (Δεν είναι λυμένη!)

A-16. Ας είναι p και q συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$, τέτοιες ώστε

$$|p(x)|\geq|q(x)| \text{ για όλα τα } x\geq 0,$$

και ας θεωρήσουμε τις πρώτης τάξης ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

(P) $$y'+py=0$$

και

(Q) $$z'+qz=0.$$

Να εξεταστεί αν είναι αληθής ή ψευδής η πρόταση: Αν όλες οι λύσεις της (Q) τείνουν προς το μηδέν για $x\to\infty$, τότε όλες οι λύσεις της (P) τείνουν προς το μηδέν για $x\to\infty$.

A-17. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)dx+\left(\frac{x}{y^2}+\frac{3}{y}\right)dy=0,$$

αφού βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\rho(x,y)=x\phi(y)$, όπου ϕ είναι μία κατάλληλη συνάρτηση (που θα πρέπει να προσδιοριστεί). Στη συνέχεια, να επιλυθεί η παραπάνω διαφορική εξίσωση και με έναν άλλον τρόπο.

A-18. Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx}=(x^2+y+1)\left(x^2+y-\frac{3}{2}\right)+1-2x$$

δέχεται λύσεις της μορφής $y=\lambda-x^2$ (όπου λ είναι σταθερά). Στη συνέχεια, να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση αυτή.

A-19. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$[y + x(x^2 + y^2)^2]dx + [y(x^2 + y^2)^2 - x]dy = 0,$$

αφού πρώτα βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $\rho(x, y) = \phi(x^2 + y^2)$ (όπου ϕ είναι μία συνάρτηση που θα πρέπει να προσδιοριστεί).

A-20. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(2y^3 - 3xy)dx + (x^2 + xy^2)dy = 0,$$

ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ

με τη βοήθεια ολοκληρωτικού παράγοντα της μορφής $\rho(x,y) = \phi(x/y^2)$ (όπου ϕ είναι μία συνάρτηση που θα πρέπει να προσδιοριστεί).

A-21. Έστω η πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y' + py = q,$$

όπου p και q είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν $x_0 \geq 0$ και μία σταθερά $\mu > 0$, έτσι ώστε $p(x) \geq \mu$ για όλα τα $x \geq x_0$, και ότι $\lim_{x\to\infty} q(x) = 0$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (E) τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$.

ΘΕΜΑ Ιούνιος 2011

Εφαρμογή: **Να αποδειχθεί ότι κάθε λύση της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης**

$$y' + y\log\left(\frac{5}{2} + \sin x\right) = \frac{\cos x}{(x+1)^2},\ x \geq 0$$

τείνει προς το μηδέν για $x \to \infty$.

A-22. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$2(y')^2 = (y-1)y'';\ y(1) = 2,\ y'(1) = -1.$$

A-23. Με την αντικατάσταση $y'/y = z$, να επιλυθεί **το πρόβλημα αρχικών τιμών**

$$x^2yy'' - (xy' - y)^2 = 0;\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0.$$

A-24. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

(E) $$(\alpha xy + \beta y^2)dx + (\alpha xy + \beta x^2)dy = 0,$$

όπου α και $\beta \neq 0$ είναι πραγματικές σταθερές. Να βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της (E) της μορφής $\rho(x,y) = \phi(x+y)$, όπου ϕ είναι κατάλληλη συνάρτηση. Στη συνέχεια, με χρήση αυτού του ολοκληρωτικού παράγοντα ή με άλλον τρόπο, να επιλυθεί η (E).

A-25. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(2x^2 + 2xy^2 + 1)}{x + 3y^2}.$$

ΘΕΜΑ

✓ A-26. Ας είναι b και c θετικές σταθερές. Να αποδειχθεί ότι κάθε λύση y της λογιστικής εξίσωσης $y' = y(b - cy)$ με $y(0) > 0$ παραμένει θετική για $x > 0$ και τείνει προς τη σταθερή λύση b/c για $x \to \infty$.

A-27. Έστω η πρώτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y' = ay + b,$$

όπου a και b είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο διάστημα $[0,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι:

(i) Αν $a(x) \leq m$ για όλα τα $x \geq 0$, όπου m είναι μία μη αρνητική σταθερά, και η συνάρτηση b είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$, τότε κάθε λύση της (Ε) είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$.

(ii) Αν $a(x) \geq k$ για όλα τα $x \geq 0$, όπου k είναι μία θετική σταθερά, και η συνάρτηση b είναι φραγμένη στο $[0,\infty)$, τότε υπάρχει ακριβώς μία λύση της (Ε) που είναι φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$ και η λύση αυτή δίνεται από τον τύπο

$$y(x) = -\int_x^{\infty} b(s)\exp\left[\int_s^x a(t)dt\right]ds \text{ για } x \geq 0.$$

B. ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

B-1. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=x^2\log x,\ \ x>0.$$

B-2. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση Θ. Euler (θέτω $t = \log x$)

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=x^3e^x,\ \ x>0.$$

B-3. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y''-2y'+y=e^x/x,\ \ x>0;\quad y(1)=0,\ \ y'(1)=1.$$

B-4. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$(1-x)y''+xy'-y=0,\ \ x>1$$

με το δεδομένο ότι έχει κοινή λύση με τη διαφορική εξίσωση

$$2x(2x-1)y''-(4x^2+1)y'+(2x+1)y=0,\ \ x>1.$$

Βρίσκω μία λύση & χρησιμοποιώ την μέθοδο υποβιβασμού τάξης.

B-5. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''-3y'+2y=1/(1+e^{-x}),\ \ x\in\mathbb{R}.$$

* έχει δύσκολες πράξεις

B-6. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2x}{1+x^2}\frac{dy}{dx}+\frac{2}{1+x^2}y=1+x^2.$$

$y = x$, όπως $\boxed{B-4}$

B-7. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^3y'''+x^2y''-2xy'+2y=x^3\sin x,\ \ x>0.$$

B-8. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y''+xy'+y=0,\ \ x\in\mathbb{R},$$

αφού διαπιστωθεί ότι $y_1(x)=e^{-x^2/2}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι μία λύση της.

✓ B-9. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x+1)^2 y'' + (x+1)y' + y = (x+1)\log^2(x+1),\ x > -1;\quad y(0)=0,\ y'(0)=1.$$ ✓

B-10. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $z = xy$, να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

ΕΜΕΙΝΕ

$$x(x+1)^2 y'' + (3x+2)(x+1)y' + y = \log(x+1),\ x > 0.$$ ✓

✓ B-11. Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $y = x^{\alpha} z$ (όπου α είναι κατάλληλος πραγματικός αριθμός), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}\sin x,\ x > 0.$$ ✓ $\alpha = -\frac{1}{2}$

καθορίζεται

✓ B-12. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \log x,\ x > 0.$$ ✓

αν προλάβω να τις λύσω...

B-13. Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $y = u^m$ (όπου $m \neq 0$ είναι ένας ακέραιος), να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$yy'' - 2(y')^2 + 2yy' - y^2 + xy^3 = 0.$$

ΕΜΕΙΝΕ

B-14. Να αποδειχθεί ότι οι συναρτήσεις

$$y_1(x) = x^{-1/2}\cos x,\ x > 0 \quad \text{και} \quad y_2(x) = x^{-1/2}\sin x,\ x > 0$$

αποτελούν ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0,\ \ x > 0.$$

Στη συνέχεια, να επιλυθεί η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2},\ \ x > 0.$$

✓ B-15. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = \frac{z}{x}\sin x$, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$xy'' + 2y' + xy = 0,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

B-16. Με την αντικατάσταση $z = e^{-y/x}$, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$x^3 y'' + 2x^2 = (xy' - y)^2; \quad y(1) = 0, \; y'(1) = 2.$$

B-17. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση
$$y'' + (2x+1)y' + \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)y = 0,$$
αφού πρώτα βρεθεί μία λύση y_1 αυτής της μορφής $y_1(x) = e^{\alpha x^2 + \beta x}$, $x \in \mathbb{R}$ (όπου α και β είναι πραγματικές σταθερές που θα πρέπει να προσδιοριστούν). $a = -\frac{1}{2}$

$b = \frac{1}{2}$

B-18. Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = ze^{-x^2/2}$, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών
$$y'' + (2x-1)y' + (x^2 - x + 1)y = 0; \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 5.$$

50%

B-19. Με τη βοήθεια μίας αντικατάστασης της μορφής $t = x^\alpha$ (όπου α είναι κατάλληλος πραγματικός αριθμός που θα πρέπει να βρεθεί), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση
$$x\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4x^3 y = 4x^5 e^{x^2} \sin x^2, \; x > 0.$$ (ΔΥΣΚΟΛΗ)

B-20. Με την αντικατάσταση $u = y\sqrt{x}$, $x > 0$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση
$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \; x > 0.$$

B-21. Με χρήση του μετασχηματισμού $t = 1 + x^2$, να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση
$$x(1+x^2)^2 y'' - (1-3x^2)(1+x^2)y' - 8x^3 y = 4x^3(1+x^2), \; x > 0.$$

όπως Β-13

B-22. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 1 + x$$

καθώς και η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση

(E_0) $$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

όπου p και q είναι συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Ας υποθέσουμε ότι μία λύση της (E_0) είναι η $y_1(x) = (1+x)^2$, $x \in \mathbb{R}$ και ότι η ορίζουσα Wronski δύο οποιωνδήποτε λύσεων της (E_0) είναι σταθερά. Να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση (E).

ΟΧΙ ΛΥΜΕΝΗ

B-23. Έστω η τρίτης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(\mathrm{E}_0) \qquad a_3y''' + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0,$$

όπου a_0, a_1, a_2 και a_3 είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας και $a_3(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in \mathrm{I}$. Ας είναι y_1 και y_2 δύο λύσεις της (E_0) τέτοιες ώστε

$$y_1(x) \neq 0 \quad \text{και} \quad (y_2/y_1)'(x) \neq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathrm{I}.$$

Να επιλυθεί η (E_0) με αναγωγή αυτής σε μία πρώτης τάξης ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση.

ΟΧΙ ΛΥΜΕΝΗ

B-24. Ας είναι $\{y_1, y_2\}$ ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων μίας ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης με διάστημα ορισμού το $(-\infty,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της y_1 υπάρχει ακριβώς μία ρίζα της y_2.

ΟΧΙ ΛΥΜΕΝΗ.

B-25. Έστω η διαφορική εξίσωση $y'' + ay = 0$, όπου a είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα (x_1, x_2) με $-\infty \leq x_1 < x_2 \leq \infty$. Να αποδειχθεί ότι οι ρίζες μίας μη μηδενικής λύσης της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι μεμονωμένες (δηλαδή κάθε σημείο του συνόλου των ριζών δεν είναι σημείο συσσώρευσης αυτού). [*Υπόδειξη:* Να αποδειχθεί, πρώτα, ότι για κάθε ρίζα x^* μίας μη μηδενικής λύσης y ισχύει $y'(x^*) \neq 0$.]

B-26. Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση ΘΕΩΡΙΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

$$(\mathrm{E}_0) \qquad y'' + py' + qy = 0,$$

όπου p και q είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα (α, β) με $-\infty \leq \alpha < \beta \leq \infty$. Ας είναι $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και y_1, y_2 δύο λύσεις της (E_0). Να αποδειχθεί ότι, αν $y_1(x_0) = 0$ και $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$, τότε είτε είναι $y_1 = 0$ είτε ισχύει $y_2 = [y_2'(x_0)/y_1'(x_0)]y_1$.

ΘΕΩΡΙΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

B-27. Έστω I ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας και έστω x_0 ένα σημείο του I. Ας είναι $y_1, y_2, \cdots, y_m$ λύσεις μίας n-τάξης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με διάστημα ορισμού το I. Να αποδειχθεί ότι οι λύσεις y_k $(k = 1, 2, \cdots, m)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνον αν τα διανύσματα

$$\begin{pmatrix} y_k(x_0) \\ y_k'(x_0) \\ \vdots \\ y_k^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

B-28. Ας είναι α, ω και c σταθερές με $0 \le \alpha < \omega$ και $c > 0$. Να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

φανταστικό μέρος

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = c \sin \omega x, \; x \in \mathbb{R}.$$

SOS

B-29. Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{5} y^{(k)} = 0.$$

(i) Να βρεθεί ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων της (*).

(ii) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων της (*), οι οποίες τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$, είναι ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, να βρεθεί μία βάση αυτού.

ΤΗΝ ΕΧΩ

B-30. Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(\mathrm{E}_0) \qquad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

όπου a_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1, n)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[x_0, \infty)$ και $a_n(x) \neq 0$ για όλα τα $x \ge x_0$. Να βρεθεί μία αναγκαία συνθήκη ώστε κάθε λύση της (E_0) καθώς και οι παράγωγοι μέχρι n-1 τάξης αυτής να είναι φραγμένες στο διάστημα $[x_0, \infty)$.

Εφαρμογή I: Να αποδειχθεί ότι η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση $y'' - xy' + y\cos x = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση τέτοια ώστε αυτή ή η παράγωγός της να μην είναι φραγμένη στο διάστημα $[0, \infty)$.

S.O.S *Εφαρμογή* II: Ας θεωρήσουμε την Euler ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\alpha_n x^n y^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 x y' + \alpha_0 y = 0, \; x \ge 1,$$

όπου α_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1, n)$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha_n \alpha_{n-1} < 0$. Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση αυτή έχει μία τουλάχιστον λύση y, τέτοια ώστε η λύση y ή μία τουλάχιστον από τις παραγώγους $y^{(k)}$ $(k = 1, \cdots, n-1)$ αυτής να είναι μη φραγμένη συνάρτηση στο $[1, \infty)$.

ΠΟΛΥ ΚΑΛΗ !!!

B-31. Ας είναι β και γ θετικοί αριθμοί με $\beta^2 \neq 4\gamma$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + \beta y' + \gamma y = (x+1)^{-2} \sin x, \; x \ge 0$$

τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$.

2011

B-32. Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $t = x^{\alpha}$ (όπου α είναι κατάλληλη πραγματική σταθερά), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$xy'' - y' + x^3 y = 0,\ x > 0.$$

ΟΧΙ ΛΥΜΕΝΗ

B-33. Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $y = ze^{-x^2/4}$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' + \left(p + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2\right)y = 0,$$

όπου p είναι μία πραγματική σταθερά.

Δεν λυθηκαν μέχρι τέλους.

B-34. Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $y = x^{\alpha} z$ (όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός που θα πρέπει να βρεθεί), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2} e^{-x},\ x > 0.$$

B-35. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y = ue^{-(x^2+x)/2}$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' + (2x+1)y' + \left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right)y = 0.$$

ΟΧΙ ΛΥΜΕΝΗ

B-36. Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(*) $$\sum_{k=0}^{7} y^{(k)} = 0.$$

(i) Να βρεθεί ένα βασικό σύνολο πραγματικών λύσεων της (*).

(ii) Να αποδειχθεί ότι το σύνολο όλων των πραγματικών λύσεων της (*), οι οποίες τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$, είναι ένας γραμμικός χώρος επί του $\mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, να βρεθεί μία βάση αυτού.

ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΟΠΩΣ B-21 (ΛΥΜΕΝΕΣ)

B-37. Ας είναι α, ω και c σταθερές με $0 \le \alpha < \omega$ και $c > 0$. Για τυχούσα λύση y της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = \underbrace{c\cos\omega x}_{\text{πραγματικό μέρος}},\ x \in \mathbb{R},$$

να βρεθεί το $\limsup_{x\to\infty} |y(x)|$.

ΞΑΝΑ

B-38. Να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0,\ 0 < x < \pi,$$

αφού πρώτα βρεθεί μία λύση y_1 αυτής της μορφής $y_1(x) = x^{\alpha}\sin x,\ x \in (0,\pi)$ (όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός που θα πρέπει να προσδιοριστεί).

ΟΧΙ ΛΥΜΕΝΗ.

B-39. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = b,$$

όπου a_i $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ είναι σταθερές και b είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Ας είναι y_0 η λύση της αντίστοιχης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(0) = y_0'(0) = \ldots = y_0^{(n-2)}(0) = 0, \; y_0^{(n-1)}(0) = 1.$$

Να αποδειχθεί ότι

$$y_\mu(x) = \int_0^x y_0(x-t)b(t)dt, \; x \in \mathbb{R}$$

είναι η λύση της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_\mu(0) = y_\mu'(0) = \ldots = y_\mu^{(n-1)}(0) = 0.$$

B-40. Ας είναι a, b, c και k θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει $bk \neq ak^2 + c$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = \underline{e^{-kx}}, \; x \in \mathbb{R}$$

τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$. χωρίς x // με x στη B-44

B-41. Με την αντικατάσταση $z = (1 + x^2)y$, να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2(1 + x^2)y'' + x(3x^2 - 1)y' + (1 + x^2)y = x^2 \log x, \; x > 0.$$

ΠΑΡΟΜΟΙΑ

$a = -1$

$\boxed{\text{B-42.}}$ Με τη βοήθεια ενός μετασχηματισμού της μορφής $t = x^a$ (όπου a είναι κατάλληλος αριθμός που θα πρέπει να βρεθεί), να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^4 y'' + 2x^2(1 + x)y' + y = 1/x^2, \; x > 0.$$ (ΙΠΔΑ)

B-43. Ας είναι b και c πραγματικές σταθερές και έστω y μία λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'' - 2by' + cy = 0$$

τέτοια ώστε $y(0) = y(1) = 0$. Να αποδειχθεί ότι

$$y(n) = 0 \quad \text{για κάθε ακέραιον } n.$$

B-44. Ας είναι a, b, c και k θετικοί αριθμοί με $bk \neq ak^2 + c$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$ay'' + by' + cy = \underline{x}e^{-kx}, \; x \in \mathbb{R}$$ (ΠΑΡΟΜΟΙΑ ΜΕ ΤΗ B-40)

τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$.

✓ B-45. Έστω k ένας θετικός ακέραιος. Να βρεθούν οι τιμές της πραγματικής παραμέτρου c, έτσι ώστε η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2cy' + y = 0$$

(βλέπε Β-43)

να έχει μία μη μηδενική λύση y τέτοια ώστε $y(0) = y(2k\pi) = 0$.

ΘΕΜΑ ΙΑΝ. 2011

ΘΕΜΑΤΑ

B-46. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y'' + 2\alpha y' + \beta y = \phi,$$

όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > 0$ και $\beta > \alpha^2$, και ϕ είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι, αν $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$, τότε για κάθε λύση y της (E) ισχύει

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = 0.$$

B-47. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y'' + 2\alpha y' + \beta y = \phi,$$

όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > 0$ και $\beta > \alpha^2$, και ϕ είναι μία συνεχής και φραγμένη συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (E) είναι φραγμένες στο $[0,\infty)$. Επίσης, να αποδειχθεί ότι οι παράγωγοι των λύσεων της (E) είναι φραγμένες στο διάστημα $[0,\infty)$.

ΟΧΙ ΛΥΜΕΝΗ

B-48. Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$ay'' + by' + cy = \phi,$$

όπου a, b, c είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ϕ είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ τέτοια ώστε $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = 0$. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (E) τείνουν προς το μηδέν για $x \to \infty$.

✓ B-49. Να προσδιοριστούν όλοι οι πραγματικοί αριθμοί $L > 1$, έτσι ώστε η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$x^2 y'' + y = 0, \quad 1 \le x \le L$$

να έχει μη μηδενικές λύσεις y που να πληρούν τις συνθήκες $y(1) = y(L) = 0$.

ΟΧΙ ΛΥΜΕΝΗ

B-50. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y'' + 2\alpha y' + \alpha^2 y = b,$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$ και b είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας είναι y μία τυχούσα λύση της (E) και έστω $Y(x) = \dfrac{1}{x} y(x)$ για $x > 0$. Να αποδειχθεί ότι:

(i) Αν η b είναι φραγμένη, τότε η Y είναι φραγμένη.

(ii) Αν $\lim_{x\to\infty} b(x) = 0$, τότε $\lim_{x\to\infty} Y(x) = 0$.

SOS ΘΕΜΑ Είναι λυμένη σε τη φυλλάδιο ! ΣΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

B-51. ~~Ας είναι~~ b μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$, για την οποία υπάρχει μία σταθερά $C \geq 0$ έτσι ώστε

$$\int_x^{x+1} |b(t)|\,dt \leq C \quad \text{για όλα τα } x \geq 0.$$

Να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$e^{-x}\int_0^x e^t |b(t)|\,dt \leq C\frac{e}{e-1} \quad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Στη συνέχεια, να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 2y' + 2y = b$$

ΕΙΝΑΙ ΛΥΜΕΝΗ ΚΑΝΟΝΙΚΑ

είναι φραγμένες στο διάστημα $[0,\infty)$.

B-52. Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y''' + \omega^2 y' = b,$$

όπου $\omega > 0$ είναι μία σταθερά και b είναι μία συνεχής μη μηδενική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. (1) Να βρεθούν όλες οι λύσεις της (E). Ειδικά, (2) να βρεθεί η λύση y_0 της (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_0(0) = y_0'(0) = 0$ και $y_0''(0) = 1$. Στη συνέχεια, (3) να αποδειχθεί ότι η συνθήκη $\int_0^\infty |b(x)|\,dx < \infty$ είναι μία ικανή συνθήκη ώστε όλες οι λύσεις της (E) να είναι φραγμένες στο διάστημα $[0,\infty)$. Τέλος, να δοθεί ένα παράδειγμα μίας φραγμένης συνάρτησης b στο $[0,\infty)$ έτσι ώστε η λύση y_0 της (E) να είναι μη φραγμένη στο διάστημα $[0,\infty)$. (4)

ΘΕΜΑ

B-53. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν πραγματικές σταθερές α και δ έτσι ώστε, για κάθε λύση y της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y'' + 8y' + 25y = 2\cos x, \; x \in \mathbb{R},$$

να ισχύει

$$\lim_{x\to\infty}\left[y(x) - \alpha\cos(x-\delta)\right] = 0.$$

ΘΕΜΑ

B-54. Έστω η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E) $$y'' - y'\cos x + y\sin x = \sin x, \; x \in \mathbb{R}$$

και ας συμβολίσουμε με (E_0) την αντίστοιχη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση αυτής. Αφού διαπιστωθεί ότι $y_1(x) = e^{\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι μία (μερική) λύση της (E_0), να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (E_0). Στη συνέχεια, να βρεθεί η (μερική) λύση y_μ της (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_\mu(0) = y_\mu'(0) = 0.$$

Τέλος, να βρεθεί η λύση y της (E) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y(0) = 1 \quad \text{και} \quad y'(0) = 0.$$

B-55. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \left(1-\frac{1}{x}\right)y''+\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)y'-\frac{1}{x^4}y=\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3},\ x>1.$$

Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση $t=1/x$ μετασχηματίζει την (E_1) σε μία μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση (E_2). Να βρεθεί μία μερική λύση y_μ της (E_2) της μορφής $y_\mu(t)=t^m$, $t<1$ (m ακέραιος). Ας είναι (E_3) η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση της (E_2). Να βρεθούν δύο λύσεις y_1 και y_2 της (E_3) των μορφών $y_1(t)=\alpha t+\beta$, $t<1$ και $y_2(t)=e^{\gamma t}$, $t<1$ (α,β,γ σταθερές). Τέλος, να βρεθεί η γενική λύση της (E_1).

ΘΕΜΑ ΠΑΡΟΜΟΙΑ

B-56. Ας είναι γ και ω δύο θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $\gamma\neq\omega$. Ακόμα, ας είναι f μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ με $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$, όπου L είναι μία πραγματική σταθερά. Να αποδειχθεί ότι, για κάθε λύση y της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$y''+2\gamma y'+\omega^2y=f\,,$$

ισχύει

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=L/\omega^2 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to\infty}y'(x)=0\,.$$

B-57. Έστω η γραμμική διαφορική εξίσωση πραγματικό μέρος.

$$(\mathrm{E}) \qquad y''+2\alpha y'+\omega^2y=c\cos\omega x,\ x\in\mathbb{R}$$

όπου $\alpha\geq0$, $\omega>0$ και $c\neq0$ είναι πραγματικές σταθερές. Να βρεθούν όλες οι πραγματικές λύσεις της (Ε). Στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση y_0 της (Ε) που πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(0)=y_0'(0)=0\,.$$

ΟΧΙ ΛΥΜΕΝΗ

B-58. Έστω η μη ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(\mathrm{E}) \qquad y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=b,$$

όπου a_0, a_1 και a_2 είναι σταθερές, και b είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$.

(i) Ας είναι y_0 η λύση της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$(\mathrm{E}_0) \qquad y'''+a_2y''+a_1y'+a_0y=0,$$

η οποία πληροί τις αρχικές συνθήκες

$$y_0(0)=y_0'(0)=0 \quad \text{και} \quad y_0''(0)=1\,.$$

Να αποδειχθεί ότι μία μερική λύση της (Ε) είναι η

$$y_\mu(x)=\int_0^x y_0(x-t)b(t)dt \quad \text{για} \quad x\geq0\,.$$

(ii) Ας υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ έχει μία απλή ρίζα λ_1 με $\mathrm{Re}\,\lambda_1 \leq 0$ και μία διπλή ρίζα λ_2 με $\mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$. Ακόμα, ας υποθέσουμε ότι

$$\int_0^\infty |b(x)|\,dx < \infty .$$

Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (Ε) είναι φραγμένες στο $[0,\infty)$.

ΟΧΙ ΛΥΜΕΝΗ

B-59. Δίνεται η γραμμική διαφορική εξίσωση

(Ε) $$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b ,$$

όπου a_0, a_1 και $a_2 \neq 0$ είναι σταθερές και b είναι μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$. Ας είναι λ_1 και λ_2 οι ρίζες του πολυωνύμου $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ και ας υποθέσουμε ότι $\mathrm{Re}\,\lambda_1 < 0$ και $\mathrm{Re}\,\lambda_2 < 0$. Επίσης, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μία σταθερά $C \geq 0$ τέτοια ώστε

$$\int_x^{x+1} |b(t)|\,dt \leq C \quad \text{για κάθε } x \geq 0 .$$

Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της (Ε) είναι φραγμένες στο διάστημα $[0,\infty)$.

Υπόδειξη: Να αποδειχθεί και, στη συνέχεια, να χρησιμοποιηθεί το ακόλουθο: Ας είναι ϕ μία συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο διάστημα $[0,\infty)$ τέτοια ώστε, για κάποια σταθερά $C \geq 0$, να ισχύει

$$\int_x^{x+1} \phi(t)\,dt \leq C \quad \text{για κάθε } x \geq 0 .$$

Τότε, για οποιοδήποτε $\alpha > 0$, ισχύει

$$e^{-\alpha x} \int_0^x e^{\alpha t} \phi(t)\,dt \leq \frac{C}{1 - e^{-\alpha}} \quad \text{για όλα τα } x \geq 0 .$$

C. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

C-1. Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, για τις ακόλουθες δύο διαφορικές εξισώσεις:

(i) $$2y'' + xy' + y = 0.$$

(ii) $$2y'' - 3xy' - 6y = 0.$$

C-2. Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2(x-1)y' - 2y = 0.$$

Ειδικά, να βρεθεί η λύση y_0 αυτής που πληροί τις αρχικές συνθήκες $y_0(1) = 1$, $y_0'(1) = 0$.

C-3. Να επιλυθούν τα προβλήματα αρχικών τιμών:

(i) $$y'' - 2xy' - 2y = 0; \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$$

(ii) $$y'' + xy' + 3y = 0; \quad y(0) = -2, \ y'(0) = 6.$$

(iii) $$y'' + x^2 y' + 2xy = 0; \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$$

√ $\boxed{\text{C-4.}}$ Για τη διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$$

να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

√ C-5. Για τη διαφορική εξίσωση

$$(1+x^2)y'' + 3xy' + y = 0$$

να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

ΘΕΜΑ ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2006

√ $\boxed{\text{C-6.}}$ Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$x(2-x)y'' - 6(x-1)y' - 4y = 0; \quad y(1) = 1, \ y'(1) = 3.$$

C-7. Να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(x^2 - 2x)y'' + 5(x-1)y' + 3y = 0; \quad y(1) = 2, \ y'(1) = -1.$$

SOS

ΘΕΜΑ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2009 / Ιανουάριος 2011

(Ε2) **C-8.** Έστω η δεύτερης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y''-xy'+p^2y=0;\ \ -1<x<1,$$

όπου p είναι μία μη αρνητική σταθερά. Να βρεθεί ένα βασικό σύνολο λύσεων αυτής.

για $p=4$ } ΘΕΜΑ ΙΟΥΝΙΟΣ 2005

για $p=5$ → ΘΕΜΑ » 2006

σελ. 228.

(Ε1) **C-9.** Να επιλυθεί η δεύτερης τάξης ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$(1-x^2)y''-2xy'+p(p+1)y=0$$

SOS

στο διάστημα (-1,1), όπου p είναι μία πραγματική σταθερά.

για $p=2$ ΘΕΜΑ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2005

C-10. Με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $y=ze^{-x^2/4}$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$y''+\left(1-\frac{x^2}{4}\right)y=0.$$

Υπόδειξη: Για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, που θα προκύψει με τον μετασχηματισμό $y=ze^{-x^2/4}$, θα πρέπει να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις γύρω από το σημείο $x_0=0$.

C-11. Να επιλυθεί, γύρω από το σημείο $x_0=0$, η διαφορική εξίσωση

$$xy''+y'+xy=0.$$

C-12. Για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση

$$2xy''+y'-2y=0$$

C-16 | να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις γύρω από το σημείο $x_0=0$.

C-21

C-23. **C-13.** Να επιλυθεί, γύρω από το σημείο $x_0=0$, η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$xy''+(1-x^2)y'+4xy=0.$$

C-14. Ας είναι p μία πραγματική σταθερά και έστω ότι ο p δεν είναι ένας ακέραιος. Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0=0$, της δεύτερης τάξης ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$x(1-x)y''+\left[p-\left(p+\frac{3}{2}\right)x\right]y'-\frac{p}{2}y=0.$$

ΘΕΜΑ Ιούνιος '11

C-15. Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $x=e^t$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$2\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+e^{2t}y=0,\ t\in\mathbb{R}.$$

Υπόδειξη: Για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, που θα προκύψει με την αντικατάσταση $x=e^t$, θα πρέπει να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις για $x>0$ (γύρω από το σημείο $x_0=0$).

C-16. Με τη βοήθεια της αντικατάστασης $x=e^t$, να επιλυθεί η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

$$2\frac{d^2y}{dt^2}-(1+e^t)\frac{dy}{dt}-y=0,\ t\in\mathbb{R}.$$

Υπόδειξη: Για την ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση, που θα προκύψει με την αντικατάσταση $x=e^t$, θα πρέπει να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις για $x>0$ (γύρω από το σημείο $x_0=0$).

ΘΕΜΑ

C-17. Να αποδειχθεί ότι η γραμμική διαφορική εξίσωση

$$2xy''+y'+xy=0$$

δέχεται μία λύση της μορφής

$$y(x)=|x|^{\lambda}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n\right)\ \text{για}\ x\neq 0,$$

όπου $\lambda\neq 0$ και c_n (n=1,2,…) είναι πραγματικοί αριθμοί. Στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση αυτή.

C-18. Να αποδειχθεί ότι η γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$x^2y''+x(x-3)y'+3y=0,\ x>0$$

δέχεται μία λύση y_1 της μορφής

$$y_1(x)=x^{\lambda}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n\right)\ \text{για}\ x>0,$$

όπου $\lambda>0$ και c_n (n=1,2,…) είναι πραγματικοί αριθμοί· να βρεθεί η λύση αυτή. Στη συνέχεια, να βρεθεί μία λύση y_2 της (E_0), έτσι ώστε οι y_1, y_2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

C-19. Έστω η διαφορική εξίσωση

(*) $$y''+\left(p+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x^2\right)y=0,$$

όπου p είναι μία σταθερά.

(i) Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις της (*) γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι η αντικατάσταση $y = ze^{-x^2/4}$ μετασχηματίζει την (*) στην εξίσωση

(**) $$z'' - xz' + pz = 0.$$

Να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, της (**).

(iii) Να βρεθούν όλες οι λύσεις της (*).

ΘΕΜΑ

C-20. Να αποδειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση του Bessel τάξης 1/2

(E_0) $$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - 1/4\right) y = 0, \ x > 0$$

δέχεται μία λύση y_1 της μορφής

$$y_1(x) = x^\lambda \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right) \text{ για } x > 0,$$

όπου $\lambda > 0$ και c_n (n=1,2,...) είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρεθεί η λύση αυτή. [Δίνεται ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \ x \in \mathbb{R}.]$$

Στη συνέχεια, να βρεθεί μία λύση y_2 της (E_0), έτσι ώστε οι y_1, y_2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

SOSARA. ΘΕΜΑ ΙΟΥΝΙΟΣ 2010 / ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2007

(ΕΞ) 50

C-21 Να βρεθούν δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης του Hermite τάξης p ΙΟΥΝΙΟΣ 2009

$$y'' - 2xy' + 2py = 0,$$

όπου p είναι μία πραγματική σταθερά. Ως μία εφαρμογή, να επιλυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'' - 2xy' + 8y = 0; \ y(0) = y'(0) = 1.$$

(ΕΞ **C-22.** Έστω η ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση

(E_0) $$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - p^2\right) y = 0,$$

όπου $p \geq 0$ είναι μία σταθερά. Να αποδειχθεί ότι η (E_0) έχει μία λύση y_1 της μορφής

$$y_1(x) = |x|^p \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right) \text{ για } x \neq 0,$$

όπου c_n (n=1,2,...) είναι πραγματικοί αριθμοί, και να βρεθεί η λύση αυτή. Επίσης, αν ο p δεν είναι ακέραιος, να βρεθεί μία λύση y_2 της (E_0) έτσι ώστε οι y_1, y_2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Στη συνέχεια, σε καθεμία από τις δύο περιπτώσεις όπου ή $p = 0$ ή p είναι ένας θετικός ακέραιος, να δοθεί η μορφή μίας λύσης y_2 της (E_0) (χωρίς να βρεθεί η y_2) έτσι ώστε οι y_1, y_2 να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(E2)

C-23. Έστω η διαφορική εξίσωση Chebyshev

$$(1-x^2)y'' - xy' + p^2 y = 0,$$

όπου p είναι μία μη αρνητική σταθερά. Με την αλλαγή μεταβλητής $t=(1-x)/2$, να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0 = 1$, της διαφορικής εξίσωσης αυτής.

C-24. Με την αλλαγή μεταβλητής $t = e^x$, να βρεθούν οι δυναμοσειρές λύσεις, γύρω από το σημείο $x_0 = 0$, της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$(1-e^x)y'' + \frac{1}{2}y' + e^x y = 0.$$